محاسبهٔ محیط و مساحت مثلث سرپینسکی

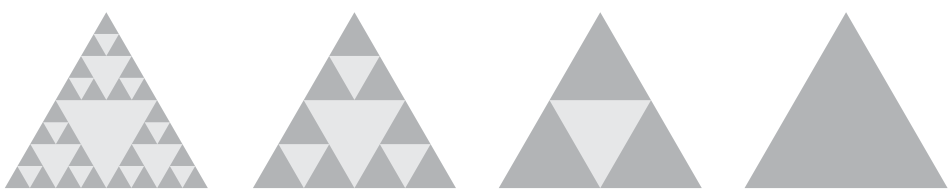
مراد کریمی شهمارondی
دبیر ریاضی دبیرستان‌های
شهرستان شهرکرد

اشاره

در فصل اول کتاب هندسهٔ ۲، دانش‌آموزان کلاس سوم ریاضی برای درک استدلال استقرایی (از جزء به کل رسیدن) با شکل‌هایی آشنا می‌شوند که به آن‌ها «خود ـ متشابه» می‌گویند؛ یعنی شکلی که یک قسمت آن با کل شکل متشابه باشد. نمونه‌ای از این‌گونه شکل‌ها مثلثی است به‌نام «مثلث سرپینسکی» که مراحل ساخت آن در کتاب درسی توضیح داده شده است. البته رسم شکل در مراحل بالاتر کمی خسته کننده، اما جالب است. دانش‌آموزان ویژگی‌های این شکل را تا چند مرحله (۴ یا ۵ مرحله) بیشتر دنبال نمی‌کنند، اما این شکل در مرحلهٔ n ام و بالاتر از آن ویژگی‌های زیباتری دارد. در این مقاله سعی می‌شود برخی از خواص این شکل در مراحل بالاتر و به‌خصوص مساحت و محیط آن بیان شود.

نحوهٔ ترسیم مثلث سرپینسکی

یک مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع a را در نظر می‌گیریم و وسط ضلع‌های آن را به هم وصل می‌کنیم. سپس سه مثلثی را که در گوشه‌ها ایجاد می‌شوند، نگه می‌داریم و مثلث میانی را با سیاه کردن حذف می‌کنیم. این فرایند را تا بی‌نهایت ادامه می‌دهیم.



مرحلهٔ صفر | مرحلهٔ اول | مرحلهٔ دوم | مرحلهٔ سوم

چهار مرحلهٔ اول رسم مثلث سرپینسکی در بالا نشان داده شده است. مرحله‌های بعدی با تقسیم مثلث‌ها به مثلث‌های کوچک‌تر ادامه پیدا می‌کند. در اینجا برای درک بهتر به تفکیک مثلث‌های سفید (مثلث‌های باقی‌مانده) و مثلث‌های سیاه (مثلث‌های حذف شده) از نظر تعداد آن‌ها، طول ضلع هر یک، مساحت و محیط آن‌ها در هر مرحله می‌پردازیم.

الف) ویژگی‌های مثلث‌های سفید (مثلث‌های باقی‌مانده) در مثلث سرپینسکی:

در جدول ۱ تعداد، طول ضلع، محیط، مساحت و الگوی ساخت مثلث‌های باقی‌مانده را مشاهده می‌کنید.

■ جدول ۱

شمارۀ مرحله	۰	۱	۲	۳	...	n
تعداد مثلث‌های سفید در هر مرحله (بدون احتساب مرحلۀ قبلی)	$۱=۳^۰$	$۳=۳^۱$	$۹=۳^۲$	$۲۷=۳^۳$	...	۳^n
طول ضلع مثلث‌های سفید در هر مرحله (L_i)	$L_۰=a=\frac{a}{۲^۰}$	$L_۱=\frac{a}{۲}=\frac{a}{۲^۱}$	$L_۲=\frac{a}{۴}=\frac{a}{۲^۲}$	$L_۳=\frac{a}{۸}=\frac{a}{۲^۳}$	...	$L_n=\frac{a}{۲^n}$
محیط مثلث‌های سفید در هر مرحله (P_i) (بدون احتساب مرحلۀ قبل)	$P_۰=۱(۳a)$	$P_۱=۳(۳\times\frac{a}{۲})$	$P_۲=۹(۳\times\frac{a}{۴})$	$P_۳=۲۷(۳\times\frac{a}{۸})$	...	$P_n=۳^n(۳\times\frac{a}{۲^n})$
مساحت مثلث‌های سفید در هر مرحله (S_i) (بدون احتساب مرحلۀ قبل)	$S_۰=۱\left[\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲\right]$	$S_۱=۳\left[\frac{\sqrt{۳}}{۴}(\frac{a}{۲})^۲\right]$	$S_۲=۹\left[\frac{\sqrt{۳}}{۴}(\frac{a}{۴})^۲\right]$	$S_۳=۲۷\left[\frac{\sqrt{۳}}{۴}(\frac{a}{۸})^۲\right]$	...	$S_n=۳^n\left[\frac{\sqrt{۳}}{۴}(\frac{a}{۲^n})^۲\right]$

توضیحات جدول

۱) در جدول ۱ حروف a، n، L_i، P_i و S_i به‌ترتیب بیانگر طول ضلع اولیه، شمارۀ مرحله، و طول ضلع، محیط و مساحت مثلث در مرحلۀ iام است.

۲) می‌دانیم مساحت هر مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع a برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$ است.

۳) می‌دانیم در هر مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع a، اگر طول ضلع نصف شود، محیط $\frac{۱}{۲}$ و مساحت $\frac{۱}{۴}$ می‌شود.

۴) تعداد مثلث‌های سفید در مرحلۀ iام = تعداد مثلث‌های سفید در مرحلۀ قبلی (مرحلۀ i−۱ام) ×۳

۵) طول ضلع مثلث‌های سفید در مرحلۀ iام = طول ضلع مثلث‌های سفید در مرحلۀ قبلی (مرحلۀ i−۱ام) × $\frac{۱}{۲}$

۶) محیط هر مثلث سفید در مرحلۀ iام = محیط مثلث سفید در مرحلۀ قبلی (مرحلۀ i−۱ام) × $\frac{۱}{۲}$

۷) مساحت هر مثلث سفید در مرحلۀ iام = مساحت مثلث سفید در مرحلۀ قبلی (مرحلۀ i−۱ام) × $\frac{۱}{۴}$

۸) محیط همه مثلث‌های سفید در مرحلۀ iام = تعداد مثلث‌های سفید در مرحلۀ iام × محیط هر مثلث در مرحلۀ iام

۹) مساحت همه مثلث‌های سفید در مرحلۀ iام = تعداد مثلث‌های سفید در مرحلۀ iام × مساحت هر مثلث در مرحلۀ iام

ب) محاسبۀ محیط و مساحت مثلث‌های سفید وقتی تعداد آن‌ها زیاد و زیادتر می‌شود:

اگر فرمول‌های به‌دست آمده در مرحلۀ nام جدول ۱ برای محیط و مساحت را به ساده‌ترین شکل ممکن درآوریم و حد آن‌ها را در بی‌نهایت (∞+) حساب کنیم، می‌توانیم محیط و مساحت مثلث سرپینسکی را وقتی تعداد آن‌ها خیلی زیاد می‌شود، محاسبه کنیم.

$$۱)\quad P_n=۳^n(۳\times\frac{a}{۲^n})=(\frac{۳}{۲})^n.(۳a)\ \Rightarrow\ \lim_{n\to+\infty}P_n=\lim_{n\to+\infty}(\frac{۳}{۲})^n.(۳a)=(۳a).\lim_{n\to+\infty}(\frac{۳}{۲})^n=+\infty$$

یعنی وقتی تعداد مثلث‌ها زیاد و زیادتر می‌شود، محیط آن‌ها به سمت بی‌نهایت میل می‌کند.

$$۲)\quad S_n=۳^n\left[\frac{\sqrt{۳}}{۴}(\frac{a}{۲^n})^۲\right]=۳^n\left[\frac{\sqrt{۳}}{۴}\times\frac{a^۲}{۲^{۲n}}\right]=۳^n\left[\frac{\sqrt{۳}}{۴}\times\frac{a^۲}{۴^n}\right]=\frac{۳^n}{۴^n}(\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲)=(\frac{۳}{۴})^n(\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲)$$

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}(\frac{۳}{۴})^n.(\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲)=(\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲).\lim_{n\to+\infty}(\frac{۳}{۴})^n=۰$$

یعنی وقتی تعداد مثلث‌ها زیاد و زیادتر می‌شود، مساحت آن‌ها به سمت صفر میل می‌کند.

ج) ویژگی‌های مثلث‌های سیاه (حذف شده) در مثلث سرپینسکی: در جدول ۲ تعداد، طول ضلع، محیط و مساحت و الگوی ساخت مثلث‌های سیاه (حذف شده) را مشاهده می‌کنید.

جدول ۲

شمارهٔ مرحله	۰	۱	۲	۳	...	n
تعداد مثلث‌های سیاه در هر مرحله (بدون احتساب مرحلهٔ قبلی)	۰	$۱=۳^۰$	$۳=۳^۱$	$۹=۳^۲$	...	$۳^{n-۱}$
طول ضلع مثلث‌های سیاه در هر مرحله (L_i)	$L_۰=۰$	$L_۱=\frac{a}{۲}=\frac{a}{۲^۱}$	$L_۲=\frac{a}{۴}=\frac{a}{۲^۲}$	$L_۳=\frac{a}{۸}=\frac{a}{۲^۳}$	...	$L_n=\frac{a}{۲^n}$
محیط مثلث‌های سیاه در هر مرحله (P_i) (بدون احتساب مرحلهٔ قبل)	$P_۰=۰$	$P_۱=۱(۳\times\frac{a}{۲})$	$P_۲=۳(۳\times\frac{a}{۴})$	$P_۳=۹(۳\times\frac{a}{۸})$	...	$P_n=۳^{n-۱}(۳\times\frac{a}{۲^n})$
مساحت مثلث‌های سیاه در هر مرحله (S_i) (بدون احتساب مرحلهٔ قبل)	$S_۰=۰$	$S_۱=۱\left[\frac{\sqrt{۳}}{۴}(\frac{a}{۲})^۲\right]$	$S_۲=۳\left[\frac{\sqrt{۳}}{۴}(\frac{a}{۴})^۲\right]$	$S_۳=۹\left[\frac{\sqrt{۳}}{۴}(\frac{a}{۸})^۲\right]$	...	$S_n=۳^{n-۱}\left[\frac{\sqrt{۳}}{۴}(\frac{a}{۲^n})^۲\right]$

د) روش محاسبهٔ تعداد مثلث‌های حذف شده (مثلث‌های سیاه): شیوهٔ محاسبه طول اضلاع، محیط و مساحت مثلث‌های سیاه دقیقاً همانند مثلث‌های سفید (توضیحات جدول ۱) است و فقط محاسبهٔ تعداد مثلث‌های سیاه در هر مرحله متفاوت از روش محاسبه تعداد مثلث سفید است که در زیر توضیح داده می‌شود:

تعداد مثلث‌های سیاه در مرحلهٔ صفر برابر صفر است و در مرحلهٔ nام برابر $۱+۳+۳^۲+۳^۳+...+۳^{n-۱}$ که یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت ۳ به‌شمار می‌رود و مجموع آن‌ها از رابطهٔ زیر حساب می‌شود:

$$S_n=\frac{a(۱-q^n)}{۱-q}=\frac{۱(۱-۳^n)}{۱-۳}=\frac{۳^n-۱}{۲}$$

هـ) محاسبهٔ محیط و مساحت مثلث‌های سیاه وقتی تعداد آن‌ها زیاد و زیادتر می‌شود: اگر فرمول‌های به‌دست آمده برای محاسبهٔ محیط و مساحت مثلث‌های سیاه در مرحلهٔ nام از جدول ۲ را به ساده‌ترین شکل بنویسیم و حد آن‌ها را در بی‌نهایت $(+\infty)$ محاسبه کنیم، محیط و مساحت مثلث‌های سیاه وقتی تعداد آن‌ها خیلی زیادتر می‌شود، به‌دست می‌آید:

۱) $$P_n=۳^{n-۱}(۳\times\frac{a}{۲^n})=\frac{۳^{n-۱}}{۲^n}(۳a)$$

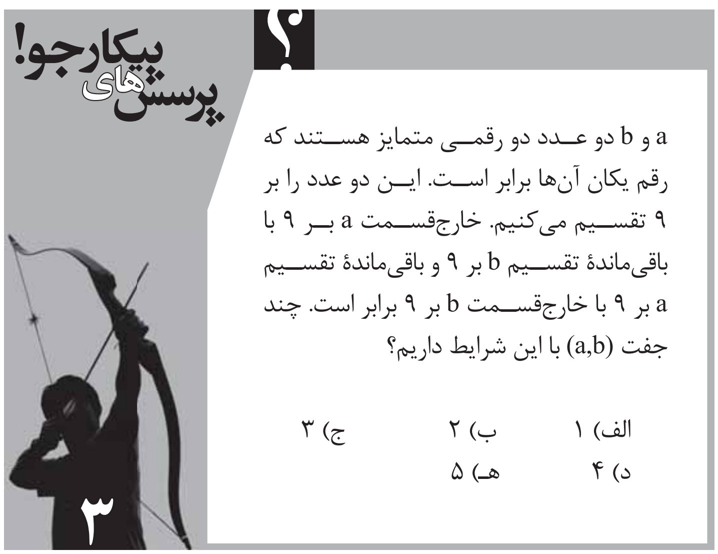
$$\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}P_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{۳^{n-۱}}{۲^n}(۳a)$$

$$=(۳a)_۰\lim_{n\to+\infty}\frac{۳^{n-۱}}{۲^n}=+\infty$$

۲) $$S_n=۳^{n-۱}\left[\frac{\sqrt{۳}}{۴}(\frac{a}{۲^n})^۲\right]=\frac{۳^{n-۱}}{۴^n}(\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲)$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{۳^{n-۱}}{۴^n}(\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲)=۰$$

یعنی وقتی تعداد مثلث‌های سیاه خیلی زیاد می‌شود، محیط آن‌ها به سمت $(+\infty)$ و مساحت آن‌ها به سمت صفر میل می‌کند.



a و b دو عدد دو رقمی متمایز هستند که رقم یکان آن‌ها برابر است. این دو عدد را بر ۹ تقسیم می‌کنیم. خارج‌قسمت a بر ۹ با باقی‌ماندهٔ تقسیم b بر ۹ و باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۹ با خارج‌قسمت b بر ۹ برابر است. چند جفت (a,b) با این شرایط داریم؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳
د) ۴ هـ) ۵